1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

1. Προσδιορίζουμε τη θέση ισορροπίας (Θ.Ι) και ορίζουμε τη θετική φορά.
2. Προσέχουμε να υπολογίσουμε σωστά τη συχνότητα της ταλάντωσης, αν αυτή δεν δίνεται άμεσα.

   πχ 1 : Η ταχύτητα του σώματος που ταλαντώνεται μηδενίζεται κάθε 0,2 sec ποια είναι η συχνότητα της ταλάντωσης;

   Απ: Η ταχύτητα μηδενίζεται κάθε φορά που το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση πράγμα που συμβαίνει κάθε T/2 (μισή περίοδο) , άρα $\frac{T}{2} = 0{,}2 \text{ sec} \Rightarrow T = 0{,}4\text{sec}$.

   Όμως $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$ Hz

   πχ 2: Το σώμα που ταλαντώνεται διέρχεται από τη Θ.Ι 40 φορές κάθε δευτερόλεπτο, ποια είναι η συχνότητα ταλάντωσης;

   Απ: Σε κάθε ταλάντωση το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας 2 φορές, άρα εκτελεί 20 ταλαντώσεις κάθε δευτερόλεπτο. Επομένως $f = \frac{N}{t} = \frac{20}{1} = 20$ Hz.

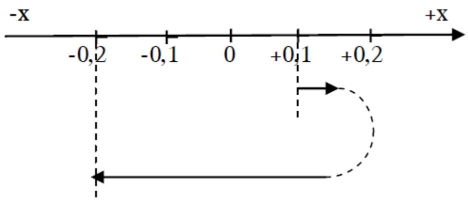
   πχ 3: Η κινητική ενέργεια (Κ) γίνεται 3πλάσια της δυναμικής ενέργειας (U), 80 φορές κάθε δευτερόλεπτο. Ποια είναι η συχνότητα ταλάντωσης; Κάθε πόσο χρόνο διέρχεται το σώμα από τη Θ.Ι ;

   Απ: Η σχέση K = 3U (θα μπορούσε να είναι K= 2U ή K= U) 4 φορές σε κάθε περίοδο άρα το σώμα εκτελεί $N = \frac{80}{4} = 20$ ταλαντώσεις , επομένως $f = \frac{N}{t} = \frac{20}{1} = 20$ Hz $\Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{20}$sec

   Το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας κάθε $\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{40} sec$

3. Δεν πρέπει να συγχέουμε σε μια ταλάντωση την απομάκρυνση, τη μετατόπιση και το διάστημα.

   πχ :



   Τη χρονική t_1 το σώμα έχει απομάκρυνση x_1=+0,1m ενώ τη χρονική στιγμή t_2 έχει απομάκρυνση x_2 = −0,2m επομένως η μετατόπιση του κινητού είναι Δx = −0,3m ενώ το διάστημα που έχει διανύσει είναι S= 0,5m.

4. Η απομάκρυνση , η ταχύτητα , η επιτάχυνση και η δύναμη επαναφοράς είναι αλγεβρικά μεγέθη άρα πρέπει να προσέχουμε το πρόσημό τους.

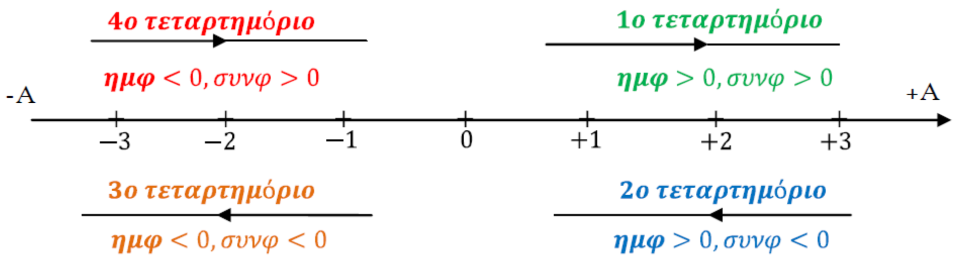
   Από τις εξισώσεις της ταλάντωσης παρατηρούμε ότι:

   x = Αημωt , δηλαδή η απομάκρυνση έχει το πρόσημο του ημιτόνου,

   $υ = υ_{max}$ συνωt, δηλαδή η ταχύτητα έχει το πρόσημο του συνημίτονου,

   $α = -α_{max}$ ημωt , $F = -F_{max}$ημωt, δηλαδή η επιτάχυνση και η δύναμη επαναφοράς έχουν πάντοτε αντίθετο πρόσημο από την απομάκρυνση.

Άρα για μια ταλάντωση έχουμε:



πχ: Όταν το σώμα που ταλαντώνεται βρίσκεται στη θέση x = +2 και κατευθύνεται προς το +A έχει θετική ταχύτητα γιατί συνφ>0, ενώ όταν βρίσκεται στη θέση x = −1 και κατευθύνεται προς το −A έχει αρνητική ταχύτητα γιατί συνφ<0

- Όταν το σώμα εκτοξεύεται από τη Θ.Ι του το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης ισούται με την υ_{max} της ταλάντωσης.
- Όταν ένα σώμα αφήνεται να ξεκινήσει την ταλάντωση του από μια θέση όπου η ταχύτητά του είναι ίση με μηδέν τότε η θέση αυτή είναι μία από τις ακραίες θέσης της ταλάντωσης.

5. <u>Διαφορά φάσης μεταξύ x,υ, α</u>

Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι x = Αημωt

Η εξίσωση της ταχύτητας $\upsilon = \upsilon_{max}$συνωt μπορεί να γραφεί $\upsilon = \upsilon_{max}$ημ(ωt+ $\frac{\pi}{2}$) . Δηλαδή η ταχύτητα προηγείται της απομάκρυνσης κατά $\frac{\pi}{2}$ rad.

Η εξίσωση της επιτάχυνσης $\alpha = -\alpha_{max}$ημωt μπορεί να γραφεί $\alpha = \alpha_{max}$ημ(ωt+π). Δηλαδή η επιτάχυνση προηγείται της ταχύτητας κατά $\frac{\pi}{2}$ rad ενώ προηγείται της απομάκρυνσης κατά π rad.

6. <u>Αν γνωρίζουμε μια από τις χρονικές εξισώσεις της ταλάντωσης πως υπολογίζουμε τις άλλες.</u>

Έστω δίνεται η εξίσωση της ταχύτητας υ = 2 συν(10t + $\frac{\pi}{3}$) (S.I).

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ισχύει $\upsilon = \upsilon_{max}$ συν(ωt+φ_0).

Η σύγκριση των δυο εξισώσεων δίνει: υ_{max}= 2m/s, ω = 10 rad/s.

Όμως $\upsilon_{max} = \omega \cdot A \Rightarrow A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} = 0{,}2m$, $\alpha_{max} = \omega^2 \cdot A = 20m/s^2$

Άρα οι υπόλοιπες εξισώσεις είναι: x = 0,2ημ(10t + $\frac{\pi}{3}$) (S.I) και α = −20ημ(10t + $\frac{\pi}{3}$) (S.I)

7. <u>Πως βρίσκουμε τη χρονική στιγμή που συμβαίνει κάτι για 1η ,2η,.. φορά.</u>

ΔΕΝ ξεχνάμε ότι 1η φορά είναι πάντοτε η 1η θετική τιμή του χρόνου που βρίσκουμε λύνοντας την κατάλληλη τριγωνομετρική εξίσωση.

πχ: Αν έχουμε την εξίσωση x = Αημ(10t+ $\frac{4\pi}{3}$) και θέλουμε να βρούμε ποια χρονική στιγμή το σώμα θα αποκτήσει για τρίτη φορά απομάκρυνση x= +A/2 ακολουθούμε τη διαδικασία.

x = Αημ(10t+ $\frac{4\pi}{3}$) $\Rightarrow \frac{A}{2} = $ Αημ$\left(10t + \frac{4\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = $ ημ$\left(10t + \frac{4\pi}{3}\right) \Rightarrow$ ημ$\left(10t + \frac{4\pi}{3}\right) = $ ημ$\frac{\pi}{6}$

Άρα $\quad 10t + \frac{4\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ (1) $\quad$ ή $\quad 10t + \frac{4\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$ (2)

Για κ=0 από την (1) προκύπτει $t = -\frac{7\pi}{60} < 0$ *απορρίπτεται*

Για κ=0 από την (2) προκύπτει $t = -\frac{3\pi}{60} < 0$ *απορρίπτεται*

Για κ=1 από την (1) προκύπτει $t = \frac{5\pi}{60} > 0$ *1η φορά*

Για κ=1 από την (2) προκύπτει $t = \frac{9\pi}{60} > 0$ *2η φορά*

Για κ=2 από την (1) προκύπτει $t = \frac{17\pi}{60} > 0$ *3η φορά*

Αν μας ενδιαφέρει και το πρόσημο της ταχύτητας τότε στο προηγούμενο παράδειγμα παρατηρούμε ότι:

για $t = \frac{5\pi}{60}$sec η ταχύτητα είναι $\upsilon = \upsilon_{max}$ συν$(10t+\frac{4\pi}{3}) = \upsilon_{max}$συν$(10\frac{5\pi}{60}+\frac{4\pi}{3}) \Rightarrow \upsilon = \upsilon_{max}$συν$(\frac{13\pi}{6}) > 0$

για $t = \frac{9\pi}{60}$sec η ταχύτητα είναι $\upsilon = \upsilon_{max}$ συν$(10t+\frac{4\pi}{3}) = \upsilon_{max}$συν$(10\frac{9\pi}{60}+\frac{4\pi}{3}) \Rightarrow \upsilon = \upsilon_{max}$συν$(\frac{17\pi}{6}) < 0$

Δηλαδή διέρχεται από τη θέση x = +A/2 για δεύτερη μεν φορά αλλά για πρώτη φορά με αρνητική ταχύτητα.

8. <u>Πως προσδιορίζουμε την αρχική φάση μιας ταλάντωσης.</u>

Η αρχική φάση είναι γωνία με τιμές $0 \leq \varphi_o < 2\pi$

Για να προσδιορίσουμε την αρχική φάση μιας ταλάντωσης έχουμε πληροφορίες για τη θέση και την ταχύτητα τη χρονική στιγμή t = 0. Από τις πληροφορίες αυτές βρίσκουμε το πρόσημο του ημιτόνου και του συνημίτονου για να καταλάβουμε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η αρχική φάση.

πχ. Ένα σώμα που εκτελεί α.α.τ πλάτους A = 0,4m τη χρονική στιγμή t = 0 διέρχεται από τη θέση x = −0,2m και το μέτρο της ταχύτητας του μειώνεται. Ποια είναι η αρχική του φάση;

Απ: Από την εξίσωση x= Aημ(ωt + φ_o) και τα δεδομένα προκύπτει

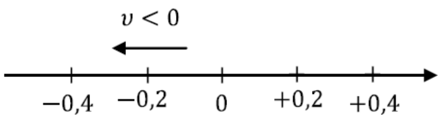
$-0,2 = 0,4$ημ$\varphi_o \Rightarrow ημ\varphi_o = -\frac{1}{2} \Rightarrow ημ\varphi_o = ημ\frac{7\pi}{6}$ άρα $\varphi_o = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}$ (1) ή $\varphi_o = 2\kappa\pi + \pi - \frac{7\pi}{6}$ (2)

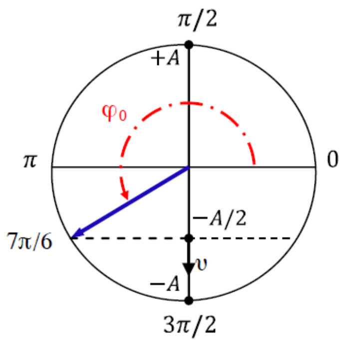
● από την (1) για κ=0 προκύπτει $\varphi_o = \frac{7\pi}{6} rad$ και από την εξίσωση της ταχύτητας

$\upsilon = \upsilon_{max}$ συν(ωt + φ_o) για t = 0 προκύπτει $\upsilon = \upsilon_{max}$συν$\frac{7\pi}{6} < 0$ (3)

● από την (2) για κ = 1 (το κ = 0 δίνει t <0 απορρίπτεται) προκύπτει $\varphi_o = \frac{11\pi}{6} rad$ και από την εξίσωση της ταχύτητας $\upsilon = \upsilon_{max}$συν$\frac{11\pi}{6} > 0$ (4)

Από τα δεδομένα παρατηρούμε ότι η ταχύτητα είναι αρνητική άρα δεκτή η (3) δηλαδή $\varphi_o = \frac{7\pi}{6} rad.$





9. Η ενέργεια που προσφέρουμε για να διεγείρουμε ένα σύστημα που ηρεμεί ώστε να εκτελέσει ΑΑΤ είναι ίση με την ολική ενέργεια της ταλάντωσης και είναι ίση με το έργο της εξωτερικής δύναμης που διεγείρει το σύστημα ώστε να εκτελέσει ΑΑΤ. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{E_{\pi\rho o\sigma\varphi} = W_{F\varepsilon\xi\omega\tau} = E_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2}$$

10. <u>Το πλάτος μιας ταλάντωσης μπορεί να υπολογιστεί αν:</u>

Α) Γνωρίζουμε διάφορα μεγέθη με βάση τα δεδομένα

πχ. Αν δίνεται η εξίσωση της επιτάχυνσης $\alpha = -8\eta\mu(2t + \pi/2)$. Συγκρίνοντας την εξίσωση με την $\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ έχουμε : $\omega = 2$ rad/s , $\alpha_{max}= 8 \Rightarrow \omega^2 \cdot A = 8 \Rightarrow A = 2$m.

Β) Μας δίνεται ότι εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας (πχ κατά 10cm) και το αφήνουμε ελεύθερο τότε το πλάτος της ταλάντωσης είναι A=10 cm.

Γ) Μας δίνεται ότι οι δύο ακραίες θέσεις της ταλάντωσης απέχουν πχ d = 20cm τότε d = 2A άρα A = 10cm.

Δ) Γνωρίζουμε το έργο της δύναμης που ασκούμε ώστε από την ηρεμία να διεγείρουμε το σώμα για να κάνει α.α.τ (δηλαδή γνωρίζουμε την ολική ενέργεια της ταλάντωσης) τότε:

$$W_F = E_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2}DA^2 \Longrightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{D}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: $\boldsymbol{E_{\tau\alpha\lambda} = K_{max} = U_{max}}$

Ε) Γνωρίζουμε για κάποια απομάκρυνση x την ταχύτητα υ που έχει , οπότε εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης (Α.Δ.Ε.Ταλ)

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

11. **Η Α.Δ.Ε.Τ. και η σχέση** $\boldsymbol{\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}}$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης (Α.Δ.Ε.Τ) και χρησιμοποιώντας τη σχέση $D= m\omega^2$ προκύπτει:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow m\omega^2A^2 = mv^2 + m\omega^2x^2 \Rightarrow \omega^2A^2 = v^2 + \omega^2x^2 \ (1)$$

Δηλαδή προκύπτει μια σχέση που συνδέει τα μεγέθη x, υ, A, ω , αν γνωρίζουμε οποιαδήποτε τρία από αυτά μπορούμε να βρούμε το τέταρτο. Επίσης αν λύσουμε την (1) ως προς υ έχουμε: $\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$. Το διπλό πρόσημο ($\pm$) μας δείχνει ότι από κάθε θέση το υλικό σημείο διέρχεται δύο φορές στη διάρκεια μιας περιόδου, με ταχύτητες ίσου μέτρου αλλά μια φορά κινούμενο προς τα θετικά του άξονα και την άλλη προς τα αρνητικά.

12. <u>Πως υπολογίζουμε σε ποια θέση ή ποια χρονική στιγμή ισχύει μια δεδομένη σχέση μεταξύ της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας.</u>

πχ1. Ένα σώμα κάνει α.α.τ, σε ποιές θέσεις ισχύει K = 3U ;

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης $K + U = E \Rightarrow K + U = U_{max} \Rightarrow$ $3U + U = U_{max} \Rightarrow 4U = U_{max} \Rightarrow\ 4\frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A}{2}$

πχ2. Ένα σώμα κάνει α.α.τ (χωρίς αρχική φάση) , για ποιες χρονικές στιγμές ισχύει K=3U;

Αφού καταλήξουμε στην προηγούμενη σχέση $x = \pm\frac{A}{2}$ ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Στην εξίσωση x = Aημωt θέτουμε όπου x μια φορά το $x = +\frac{A}{2}$ και μια φορά το $x = -\frac{A}{2}$

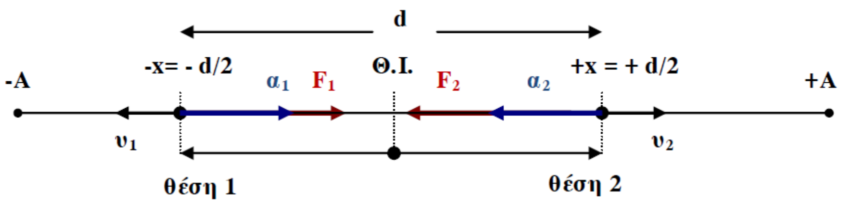
- $+\frac{A}{2} = \text{A ημωt} \Rightarrow \frac{1}{2} = \text{ημω}t \Rightarrow \eta\mu\omega t = \eta\mu\frac{\pi}{6}$ οπότε
  - ▶ $\omega t = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{6\omega}$
  - ▶ $\omega t = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{5\pi}{6\omega}$

- $-\frac{A}{2} = \text{A ημωt} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \text{ημω}t \Rightarrow \eta\mu\omega t = \eta\mu\frac{7\pi}{6}$ οπότε
  - ▶ $\omega t = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t_3 = \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{7\pi}{6\omega}$
  - ▶ $\omega t = 2k\pi + \frac{11\pi}{6} \Rightarrow t_4 = \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{11\pi}{6\omega}$

13. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης και η κινητική ενέργεια του σώματος μεγιστοποιούνται ή μηδενίζονται κάθε μισή περίοδο $\left(\frac{T}{2}\right)$ της ταλάντωσης. Επομένως η περίοδος μεγιστοποίησης ή μηδενισμού τους ισούται με $T' = \frac{T}{2}$, οπότε η αντίστοιχη συχνότητα είναι:

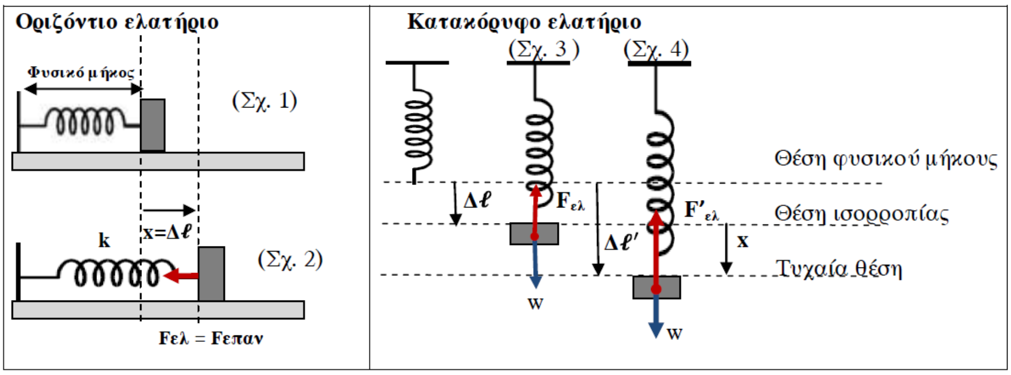
$$f' = \frac{1}{T'} = \frac{2}{T} = 2f$$

14. Επειδή είναι $(+x)^2 = (-x)^2 = x^2$, όταν ένα σώμα βρίσκεται σε δύο συμμετρικές θέσεις +x και –x , ως προς τη θέση ισορροπίας του, θα έχει ίσες ταχύτητες, κατά μέτρο όπως προκύπτει από τη σχέση $\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$ (ισχύει και το αντίστροφο). Επίσης στις θέσεις αυτές θα έχει ίσες κινητικές και ίσες δυναμικές ενέργειες ταλάντωσης.



Για τις συμμετρικές θέσεις (1) και (2) ισχύει: $|x_1| = |x_2| = x = \frac{d}{2}$ και $K_1 = K_2$, $U_1 = U_2$, $F_1 = F_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\upsilon_1 = \upsilon_2$ κατά μέτρο.

15. ΕΛΑΤΗΡΙΑ



<u>**Φυσικό μήκος**</u> είναι το μήκος που έχει το ελατήριο όταν δεν ασκείται πάνω του καμιά δύναμη. Το φυσικό μήκος είναι το ίδιο είτε το ελατήριο είναι οριζόντιο είτε κατακόρυφο γιατί θεωρούμε τα ελατήρια αβαρή. Στο οριζόντιο ελατήριο η θέση φυσικού μήκους και η θέση ισορροπίας ταυτίζονται.
<u>**Σταθερά ελαστικότητας**</u> ελατηρίου (k) είναι μέγεθος χαρακτηριστικό για κάθε ελατήριο , με μονάδα μέτρησης το 1N/m.

<u>**Νόμος του Hooke**</u> : $F_{ελ}= k \cdot Δ\ell$ (**δύναμη παραμορφωμένου ελατηρίου**)

● Υπολογίζουμε τη δύναμη που ασκεί κάθε παραμορφωμένο ελατήριο σε κάθε σώμα που βρίσκεται σε επαφή με αυτό και είναι ανάλογη της παραμόρφωσης $Δ\ell$ δηλαδή της απόστασης από το φυσικό μήκος.

● Η $F_{ελ}$ έχει πάντοτε φορά προς το φυσικό μήκος.

● Στη θέση ισορροπίας στο κατακόρυφο ελατήριο ισχύει $ΣF = 0 \Rightarrow w = F_{ελ}$

● Σε μια τυχαία θέση η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης είναι : $ΣF = w - F'_{ελ}$

● Για την **δύναμη επαναφοράς** ισχύει $ΣF= -D \cdot x$, όπου x η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας.

● Η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης έχει πάντοτε φορά προς τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

● Στις περιπτώσεις που η ταλάντωση γίνεται σε οριζόντιο επίπεδο τότε η αλλαγή του σώματος που ταλαντώνεται (λόγω πλαστικής κρούσης ή διάσπασης) δεν επηρεάζει τη Θ.Ι. αν όμως η ταλάντωση γίνεται σε κατακόρυφό ή κεκλιμένο επίπεδο η αλλαγή του σώματος που ταλαντώνεται σημαίνει και αλλαγή της Θ.Ι

● Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου εξαρτάται από την παραμόρφωση $\boldsymbol{U_{ελ} = \frac{1}{2}K \cdot Δ\ell^2}$

● Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης εξαρτάται από την απομάκρυνση $\boldsymbol{U_{ταλ} = \frac{1}{2}D \cdot x^2}$

● Το έργο της δύναμης ελατηρίου ισούται με : $\boldsymbol{W_{Fελ}= U_{ελ(αρχ)} - U_{ελ(τελ)}}$

● Το έργο της δύναμης επαναφοράς υπολογίζεται από τη σχέση : $\boldsymbol{W_{Fεπ} = U_{ταλ\,(αρχ)} - U_{ταλ(τελ)}}$ αφού είναι συντηρητική δύναμη όπως και η δύναμη του ελατηρίου,
ή με το Θ.Μ.Κ.Ε. $\boldsymbol{W_{Fεπ}= K_{τελ} - K_{αρχ}}$ αφού η δύναμη επαναφοράς είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο ταλαντευόμενο σώμα ($F_{επαν} = ΣF$).

16. <u>Πως αποδεικνύουμε ότι ένα σώμα εκτελεί α.α.τ και υπολογίζουμε την σταθερά D της ταλάντωσης.</u>

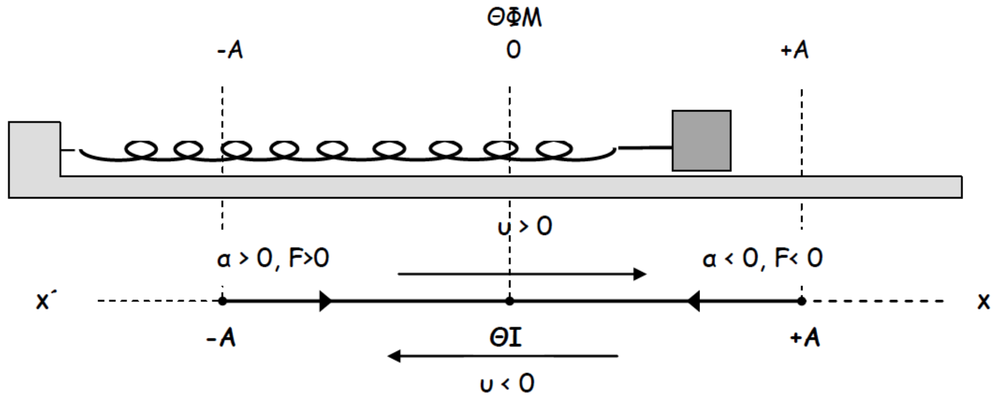
<u>Βήμα 1</u> : Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη Θ.Ι. και εφαρμόζουμε τη σχέση $\Sigma F = 0$.
<u>Βήμα 2</u> : Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις σε μια τυχαία θέση με απομάκρυνση x καθώς το σώμα ταλαντώνεται, και υπολογίζουμε την συνισταμένη (ΣF) των δυνάμεων στον άξονα της ταλάντωσης, παίρνοντας ως θετική φορά τη φορά της τυχαίας απομάκρυνσης.
<u>Βήμα 3</u> : Μετασχηματίζουμε την ΣF, ώστε να πάρει τη μορφή: $\Sigma F = -Dx$ όπου D μια παράσταση που περιέχει μόνο σταθερά μεγέθη.

<u>Βήμα 4</u> : Αντικαθιστούμε το D που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα στη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ και υπολογίζουμε την περίοδο της ταλάντωσης.

Παραδείγματα:
Α) Στην περίπτωση του οριζοντίου ελατηρίου (Σχ. 2) ισχύει: $\Sigma F = -F_{\varepsilon\lambda} = -k \cdot \Delta x$ (1).
Ένα σώμα εκτελεί α.α.τ όταν $\Sigma F = -D \cdot x$ (2) .
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $D = k$

Β) Στην περίπτωση κατακόρυφου ελατηρίου : Στο (Σχ. 3) έχουμε ισορροπία άρα ισχύει
$\Sigma F = 0 \Rightarrow w = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow w = k \cdot \Delta\ell$ (3)
Στο (Σχ. 4) για την συνισταμένη των δυνάμεων ισχύει:
$\Sigma F = w - F'_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \Sigma F = w - k(\Delta\ell + x) \Rightarrow \Sigma F = w - k\Delta\ell - kx \overset{(3)}{\Rightarrow} \Sigma F = -k \cdot x$ (4)
Ένα σώμα εκτελεί α.α.τ όταν $\Sigma F = -D \cdot x$ (2) .
Από τις σχέσεις (4) και (2) προκύπτει $D = k$

17. <u>Χαρακτηριστικές θέσεις της ΑΑΤ</u>



$x = -A$	$x = 0$	$x = +A$
$υ = 0$	$υ = \pm υ_{max}$	$υ = 0$
$α = +α_{max}$	$α = 0$	$α = -α_{max}$
$F = +F_{max}$	$F = 0$	$F = -F_{max}$
$K = 0$	$K = K_{max}$	$K = 0$
$U = U_{max}$	$U = 0$	$U = U_{max}$

18. <u>Στη διάρκεια μίας περιόδου ισχύουν τα παρακάτω:</u>

- Το σώμα διανύει απόσταση 4Α, όπου Α το πλάτος της ταλάντωσης.
- Η μετατόπιση είναι μηδέν, γιατί η αρχική και η τελική θέση είναι ίδιες.
- Το έργο της δύναμης επαναφοράς είναι μηδέν, γιατί η δύναμη επαναφοράς είναι συντηρητική δύναμη.
- Η μεταβολή της ορμής είναι μηδέν, γιατί η αρχική και η τελική ταχύτητα είναι ίσες.
- Σε δύο χρονικές στιγμές το μέτρο της απομάκρυνσης είναι ίσο με Α (στις ακραίες θέσεις), το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο (στη θέση ισορροπίας), και το μέτρο της επιτάχυνσης μέγιστο (στις ακραίες θέσεις).
- Η σχέση $K = λU$, όπου Κ η κινητική ενέργεια, U η δυναμική ενέργεια και λ θετικός ρητός αριθμός με $λ \neq 0$, ισχύει σε δύο θέσεις που αντιστοιχούν σε τέσσερις χρονικές στιγμές.
- Δύο φορές η δυναμική ενέργεια (στις ακραίες θέσεις) και η κινητική ενέργεια (στη θέση ισορροπίας) γίνονται μέγιστες και ίσες με την ενέργεια ταλάντωσης.

19. Βασικά βήματα στις ασκήσεις των μηχανικών ταλαντώσεων.

a. Σχεδιάζουμε όλα τα σχήματα και όλες τις δυνάμεις.
b. Σχεδιάζουμε όλες τις θέσεις ισορροπίας και εφαρμόζουμε συνθήκες ισορροπίας.
c. Ελέγχουμε από ποια θέση ξεκινάει το σώμα την ταλάντωση,
   i) Για να είναι θέση ισορροπίας, πρέπει $\Sigma F = 0$.
   ii) Για να είναι θέση μέγιστης απομάκρυνσης, πρέπει $\upsilon=0$.
   iii) Για να είναι τυχαία θέση, πρέπει το σώμα να απέχει x από τη θέση ισορροπίας και να έχει ταχύτητα $\upsilon \neq 0$.
d. Εφαρμόζουμε ΑΔΕΤ και βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης.
e. Βρίσκουμε την αρχική φάση, ελέγχοντας τα πρόσημα της απομάκρυνσης x και της ταχύτητας υ.
f. Γράφουμε τις σχέσεις $x = A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$, $\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0)$, $\alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$

20. Πώς προσδιορίζουμε τις εξισώσεις μεταβλητών δυνάμεων σε σώμα που εκτελεί α.α.τ.;

Όταν θέλουμε να βρούμε την τιμή μιας από τις δυνάμεις που ενεργούν σε ένα ταλαντούμενο σώμα και να γράψουμε την εξίσωση της σε συνάρτηση με την απομάκρυνση ή με το χρόνο, θεωρούμε πάντα μια τυχαία θέση κατά τη θετική φορά της ταλάντωσης και εφαρμόζουμε για το σώμα το θεμελιώδη νόμο: $\Sigma F = m\alpha$, άρα $\Sigma F = -m\omega^2 x$

Παράδειγμα:

Ένα σώμα μάζας m = 3 kg εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους A= 0,4m δεμένο στο κατώτερο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς k = 150 N/m. Να βρεθεί η εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου συναρτήσει της απομάκρυνσης της ταλάντωσης θεωρώντας θετική τη φορά προς τα κάτω.

▶ Η αρχική παραμόρφωση στη θέση ισορροπίας βρίσκεται από τη συνθήκη ισορροπίας:

$F_{\varepsilon\lambda o}=w \Rightarrow kx_0 = mg$, οπότε $x_0= mg/k = 0{,}2m$

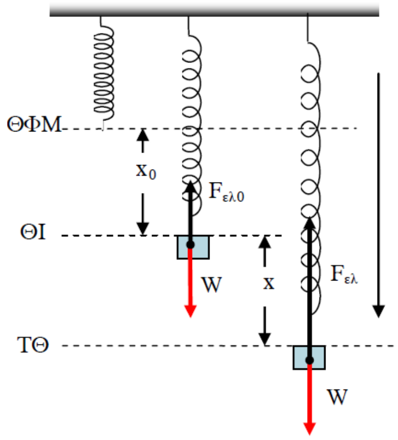
Στην τυχαία θέση απομάκρυνσης x, το σώμα του σχήματος δέχεται το βάρος του w και τη δύναμη του ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda}$. Ο θεμελιώδης νόμος του Newton θα γραφεί με τη μορφή:

$F_{\varepsilon\lambda} + w = m\alpha$ ή $F_{\varepsilon\lambda}+w = -m\omega^2 x$ ή $F_{\varepsilon\lambda} = -m\omega^2 x - w$

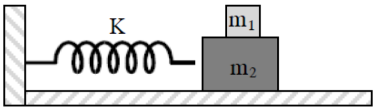
Επειδή η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος είναι $D = k = m\omega^2$, η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής:

$F_{\varepsilon\lambda} = -kx - w$, δηλαδή: $\mathbf{F_{\varepsilon\lambda} = -150x - 30}$ (S.I.).

Η σχέση μάς δίνει την αλγεβρική τιμή της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x.

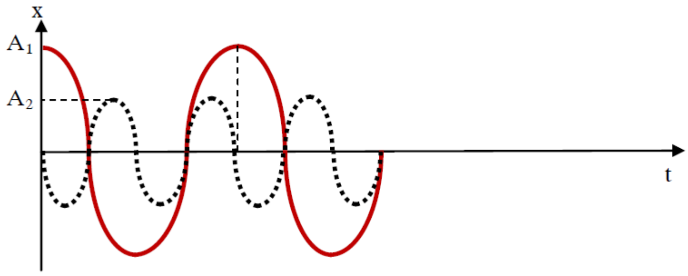


21.



Όταν δύο σώματα που βρίσκονται σε επαφή κάνουν κοινή α.α.τ τότε έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα $\omega = \omega_1 = \omega_2$.
Κάθε σώμα έχει την δική του σταθερά ταλάντωσης $D_1 = m_1 \cdot \omega^2$ και $D_2 = m_2 \cdot \omega^2$, ενώ για το σύστημα ισχύει $D = (m_1 + m_2) \cdot \omega^2$. Άρα $D = D_1 + D_2$

22.



Όταν μας δίνουν γραφικές παραστάσεις μπορούμε να βγάλουμε διάφορα συμπεράσματα. Από την παραπάνω γραφική παράσταση προκύπτουν τα εξής:

- $A_1 = 2A_2$
- $T_1 = 2T_2$

Επειδή ισχύει $\omega = \frac{2\pi}{T}$ προκύπτει ότι $\omega_2 = 2\omega_1$

- Για τις ταχύτητες ταλάντωσης ισχύει:

$$\frac{\upsilon_{01}}{\upsilon_{02}} = \frac{\omega_1 A_1}{\omega_2 A_2} = \frac{\omega_1 2A_2}{2\omega_1 A_2} = 1$$

- Για τις επιταχύνσεις ισχύει:

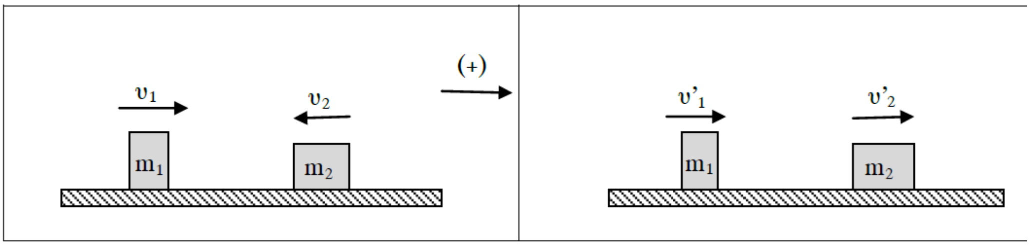
$$\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{02}} = \frac{\omega_1^2 A_1}{\omega_2^2 A_2} = \frac{\omega_1^2 2A_2}{4\omega_1^2 A_2} = \frac{1}{2}$$

- Η αρχική φάση της ταλάντωσης με το μεγαλύτερο πλάτος είναι: $\varphi_{01} = \frac{\pi}{2}\ (rad)$

ενώ της ταλάντωσης με το μικρότερο πλάτος είναι : $\varphi_{02} = \pi\ (rad)$

23. **Κρούση και ταλάντωση**
Σε όλα τα είδη των κρούσεων (ελαστικές και ανελαστικές) ισχύει η αρχή διατήρηση της ορμής (Α.Δ.Ο).

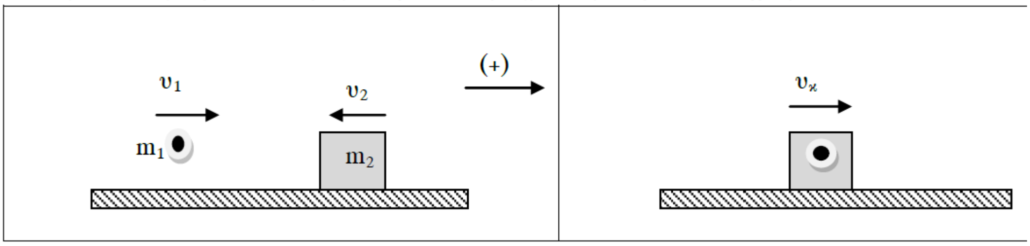
● Σε μια μετωπική κρούση εφαρμόζομε την Α.Δ.Ο αφού πρώτα ορίσουμε την θετική φορά.



πριν την κρούση **μετά την κρούση**

$\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{ολ(τελ)}$ ή $\vec{P}_{1(αρχ)} + \vec{P}_{2(αρχ)} = \vec{P}_{1(τελ)} + \vec{P}_{2(τελ)}$ ή με βάση τη θετική φορά που ορίσαμε : $m_1 \cdot \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_2 = m_1 \cdot \upsilon'_1 + m_2 \cdot \upsilon'_2$

● Σε μια κεντρική πλαστική κρούση όταν εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο έχουμε:

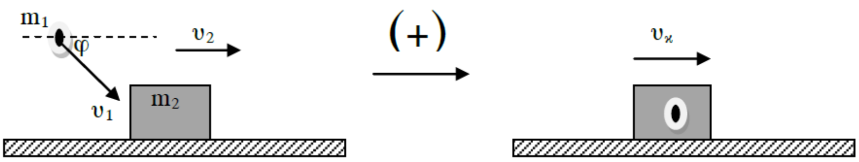


πριν την κρούση **μετά την κρούση**

$\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{ολ(τελ)}$ ή $\vec{P}_{1(αρχ)} + \vec{P}_{2(αρχ)} = \vec{P}_{(τελ)}$ ή

$m_1 \cdot \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_2 = (m_1 + m_2) \cdot \upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_2}{(m_1 + m_2)}$

● Σε πλάγια πλαστική κρούση όταν εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο έχουμε:

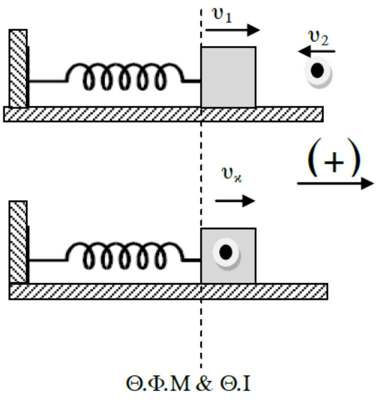


πριν την κρούση **μετά την κρούση**

$\vec{P}_{ολ(αρχ)χ} = \vec{P}_{ολ(τελ)χ}$ ή $\vec{P}_{1(αρχ)χ} + \vec{P}_{2(αρχ)χ} = \vec{P}_{(τελ)χ}$ ή

$m_1 \cdot \upsilon_1 \cdot συνφ + m_2 \cdot \upsilon_2 = (m_1 + m_2) \cdot \upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1 \cdot συνφ + \cdot \upsilon_2}{(m_1 + m_2)}$

● Πλαστική κρούση με οριζόντιο ελατήριο



► Η Θ.Φ.Μ είναι και Θ.Ι και δεν αλλάζουν πριν και μετά την κρούση.

► Η πλαστική κρούση έχει σαν αποτέλεσμα την αλλαγή της ταχύτητας ταλάντωσης και υπολογίζετε αν εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο :

$\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{ολ(τελ)}$ ή

$\vec{P}_{1(αρχ)} + \vec{P}_{2(αρχ)} = \vec{P}_{(τελ)}$ ή

$m_1 \cdot \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_2 = (m_1 + m_2) \cdot \upsilon_\kappa$ ή

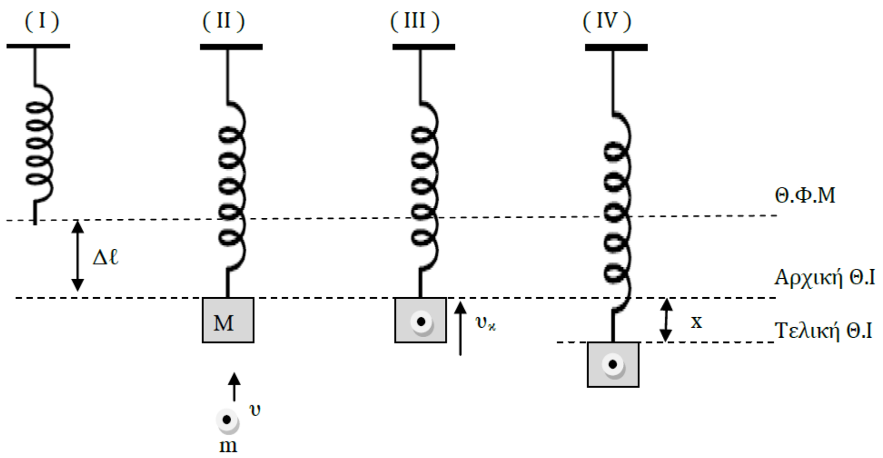
$$\upsilon_\kappa = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_2}{(m_1 + m_2)}$$

► Η πλαστική κρούση έχει σαν αποτέλεσμα την αλλαγή του πλάτους της ταλάντωσης που υπολογίζετε εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε για την νέα ταλάντωση.

► Η περίοδος της ταλάντωσης του m_1 πριν την κρούση είναι $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K}}$

Η περίοδος της ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{K}}$

● Πλαστική κρούση με κατακόρυφο ελατήριο.



► Αλλάζει η Θ.Ι λόγω αύξησης του βάρους.

► Στο παραπάνω σχήμα στην Αρχική Θ.Ι (σχ. ΙΙ) ισχύει: $\Sigma F = 0 \Rightarrow Mg = k \cdot \Delta\ell$

Στην Τελική Θ.Ι ισχύει: $\Sigma F = 0 \Rightarrow (M+m)g = k(\Delta\ell + x)$

► Αλλάζει το πλάτος της αρχικής ταλάντωσης και η περίοδος της νέας ταλάντωσης.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

1. **Σύνθεση δυο α.α.τ με την ίδια συχνότητα**

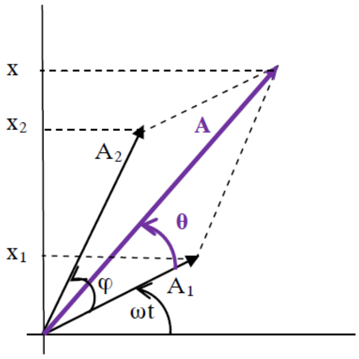
$x_1 = A_1 ημ(ωt)$
$x_2 = A_2 ημ(ωt+φ)$

Η εξίσωση απομάκρυνσης της σύνθεσης των δυο ταλαντώσεων είναι:

$x = Aημ(ωt+θ)$

Όπου $\boxed{\boldsymbol{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνφ}}}$

$\boxed{\boldsymbol{εφθ = \frac{A_2ημφ}{A_1+A_2συνφ}}}$



<u>Προσέχουμε</u> ποια από τις δύο ταλαντώσεις που συντίθενται έχει τη μεγαλύτερη φάση γιατί η σύνθετη ταλάντωση προηγείται κατά θ της ταλάντωσης με τη μικρότερη φάση.

2.

- Οι στιγμιαίες τιμές απομάκρυνσης , ταχύτητας και επιτάχυνσης προστίθενται αλγεβρικά, δηλαδή:

1η ταλάντωση	2η ταλάντωση	Σύνθετη ταλάντωση
x_1	x_2	$x = x_1+x_2$
$υ_1$	$υ_2$	$υ = υ_1+υ_2$
$α_1$	$α_2$	$α = α_1+α_2$

- Τα πλάτη των παραπάνω προστίθενται διανυσματικά

1η ταλάντωση	2η ταλάντωση	Σύνθετη ταλάντωση
A_1	A_2	$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνφ}$
$υ_{o1}$	$υ_{o2}$	$υ_0 = \sqrt{υ_{01}^2 + υ_{02}^2 + 2υ_{01}υ_{02}συνφ}$
$α_{01}$	$α_{02}$	$α_0 = \sqrt{α_{01}^2 + α_{02}^2 + 2α_{01}α_{02}συνφ}$

3. Ενέργεια κατά την σύνθεση ταλαντώσεων

- Η σταθερά επαναφοράς D δίνεται από τη σχέση $D = mω^2$ και είναι ίδια για κάθε συνιστώσα ταλάντωση κα για τη σύνθετη.

$E_1 = \frac{1}{2}DA_1^2$ η ολική ενέργεια, αν το σώμα εκτελούσε μόνο του την πρώτη ταλάντωση

$E_2 = \frac{1}{2}DA_2^2$ η ολική ενέργεια, αν το σώμα εκτελούσε μόνο του την δεύτερη ταλάντωση

$E\ = \frac{1}{2}DA^2$ η ολική ενέργεια, της σύνθετης ταλάντωσης.

● Κατά την σύνθεση ταλαντώσεων δεν ισχύει γενικά ότι η ολική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίση με το άθροισμα των ενεργειών των δυο ταλαντώσεων. Αυτό ισχύει για το σώμα δεν αποκλεισμένο από το περιβάλλον του άρα δεν έχει νόημα να μιλάμε για την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Έστω E_1 είναι η ενέργεια που θα είχε το σώμα λόγω της πρώτης ταλάντωσης και E_2 είναι η ενέργεια που θα είχε το σώμα λόγω της δεύτερης ταλάντωσης. Αν οι δύο ταλαντώσεις έχουν διαφορά φάσης φ, τότε η ολική ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης θα είναι:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}D(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{1}{2}DA_1^2 + \frac{1}{2}DA_2^2 + DA_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\Rightarrow E = E_1 + E_2 + DA_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi \ \ (1)$$

Όμως $E_1 = \frac{1}{2}DA_1^2 \Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{D}}$ (2) και $E_2 = \frac{1}{2}DA_2^2 \Rightarrow A_2 = \sqrt{\frac{2E_2}{D}}$ (3)

οπότε η σχέση (1) λόγω της (2) και της (3)γράφεται:

$$E = E_1 + E_2 + \sqrt{4E_1E_2}\sigma\upsilon\nu\varphi \ \Rightarrow \ \boxed{\boldsymbol{E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1E_2}\sigma\upsilon\nu\varphi}}$$

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης εξαρτάται όχι μόνο από ην ολική ενέργεια λόγω της κάθε ταλάντωσης, αλλά και από την διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων.

Αν η διαφορά φάσεις είναι φ = π/2 ή φ = 90° τότε μόνο ισχύει $E = E_1 + E_2$

4. **Σύνθεση δυο α.α.τ με διαφορετικές συχνότητες**

Εξίσωση 1ης Ταλάντωσης: $x_1 = Αημω_1 t$

Εξίσωση 2ης Ταλάντωσης: $x_2 = Αημω_2 t$

Αρχή της Επαλληλίας: $x = x_1 + x_2 = Αημω_1 t + Αημω_2 t = \ldots$ *με λίγες πράξεις παίρνουμε τελικά την εξίσωση της περιοδικής κίνησης.*

$$\boxed{x = 2Ασυν\left(\frac{ω_1 - ω_2}{2}t\right)ημ\left(\frac{ω_1 + ω_2}{2}t\right)} \quad (1)$$

Όταν έχουμε σύνθεση δύο α.α.τ που η διαφορά των συχνοτήτων είναι αρκετά μικρή σε σχέση με το άθροισμά τους, προκύπτουν **διακροτήματα**.

Έτσι αν $\boldsymbol{ω_1 \cong ω_2}$ και $\bar{ω} = \frac{ω_1+ω_2}{2}$ από την (1) έχω $x = 2Ασυν\left(\frac{ω_1-ω_2}{2}t\right)ημ\bar{ω}t$ ή

$x = A'ημ\bar{ω}t$ με $A' = 2Ασυν\left(\frac{ω_1-ω_2}{2}t\right)$

όπου το $\boldsymbol{A'}$ ονομάζεται **διαμορφωμένο πλάτος** ή διακρότημα.

Τότε η εξίσωση της σύνθετης κίνησης γίνεται: $x = A'ημ\left(\frac{ω_1+ω_2}{2}t\right)$ ή

$$\boxed{\boldsymbol{x = \underbrace{2Ασυν\left(\frac{ω_1 - ω_2}{2}t\right)}_{διακρότημα} \cdot \underbrace{ημ\left(\frac{ω_1 + ω_2}{2}t\right)}_{σύνθετη\ κίνηση}}}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

● Η περίοδος του διακροτήματος είναι ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της συνισταμένης ταλάντωσης και βρίσκεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{T_δ} = \frac{2π}{ω_δ} = \frac{2π}{|ω_1 - ω_2|} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{|f_1 - f_2|}} = \frac{1}{\left|\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right|} = \frac{\boldsymbol{T_1 T_2}}{\boldsymbol{|T_1 - T_2|}}$$

● Η περίοδος της συνισταμένης ταλάντωσης βρίσκεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{T} = \frac{2π}{\bar{ω}} = \frac{2π}{\frac{ω_1 + ω_2}{2}} = \frac{4π}{ω_1 + ω_2} = \frac{4π}{2π(f_1 + f_2)} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{f_1 + f_2}}$$

5. Ο αριθμός Ν των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους είναι:

$$N = \frac{T_δ}{T} = \frac{f_1 + f_2}{2|f_1 - f_2|}$$

6. Σε ένα διακρότημα με συχνότητα $f_δ = |f_1 - f_2|$, μπορούμε να αυξήσουμε τη μικρότερη από τις συχνότητες ή να μειώσουμε την μεγαλύτερη έτσι ώστε να μην αλλάξει η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους με αποτέλεσμα να μην αλλάξει η συχνότητα του διακροτήματος.